

TD 7 - Les Graphs

Retrouvez tous les énoncés et les corrections des TP sur ma page personnelle :

<http://perso.ens-lyon.fr/hadrien.croubois/>

Les graphes sont des objets mathématiques utiles à de nombreuses branches de l'informatique. Ce modèle extensif se décline sous de nombreuses formes. Nous nous intéresserons dans ce TD à la description informatique de graphes simples et au calcul de certaines caractéristiques.

Définition

Un graphe simple est un couple $G = (S, A)$ où :

- S est l'ensemble des sommets (noeuds) de G
- $A \subseteq \{(x, y) \in S^2\}$ est l'ensemble des arêtes de G

A des fins de simplification on considèrera dans la suite que $\forall (x, y) \in A, x \neq y$

Questions préliminaires :

- Quelles caractéristiques des graphes connaissez-vous ?
- Quelles grandeurs caractéristiques des graphes/noeuds connaissez-vous ?
- Caractérisez les arbres comme sous-ensemble des graphes.

Question 1

Quelle structure de données peut-on utiliser pour implémenter des graphes ? Quels sont leurs avantages et inconvénients respectifs. Dans la suite du TD, vous pourrez choisir indifféremment le format d'entrée selon vos préférences.

Algorithmes sur les graphes simple

Composantes connexes

Écrire un programme prenant en entrée un graphe et renvoyant la liste de ses composantes connexes (listes de noeuds). Vous pourrez utiliser une structure de type "union-find" à votre avantage.

Cycles

Écrire un programme indiquant si oui ou non un graphe présente un cycle.

Parcours eulérien

Un parcours eulérien est un parcours du graphe (suite des arêtes) qui passe une et non plus fois par chaque arête du graphe.

Caractérisez les graphes admettant des parcours eulériens dans le cas non orienté. Qu'en est-il dans le cas orienté ?

Implémentez un algorithme indiquant si un tel parcours existe et qui en renvoie un le cas échéant.

Graph étiquetés

Un graphe étiqueté est un graphe auquel on a attribué une valeur à chaque arête

$$A \subseteq \{(x, y, v) \in S^2 \times \mathbb{K}\}$$

Les valeurs seront généralement prises sur un monoïde de telle sorte qu'un parcours P est étiqueté par la somme des valeurs

$$\bigoplus_{(x,y,v) \in P} v$$

que l'on cherche souvent à minimiser.

Chemin de poids minimal

En supposant que toutes les valeurs sont strictement positives (il n'existe pas de cycle de valeur négative), écrire un programme qui indique s'il existe un chemin de a à b dans G et qui, si un tel chemin existe, en renvoie un de poids minimum. (indication : utiliser une file de priorité)

Imaginer un algorithme pour détecter la présence de cycle de valeur négative (il n'est pas demandé de l'implémenter)

A vos crayons !

Un graph est dit k -coloriable si on peut affecter a chaque noeud une des k couleurs disponible de telle sorte que deux noeud adjacents soient nécessairement de couleur distinctes.

Écrire un programme qui indique si un graph est 2-coloriable et qui renvoi un tel coloriage si il existe.

Que penser de la k -coloriabilité ?

Quel problème pratique implique de la k -coloriabilité ?

Comment est-il résolu ?