TP n°4 - Approximation de fonctions usuelles

Retrouvez tous les énoncés et les corrections des TPs sur ma page personnelle :

`http://perso.ens-lyon.fr/hadrien.croubois/`

Quelques formules mathématiques

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
$$exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Approximation par un programme

Pour calculer l'une des valeurs si dessus on se propose de calculer les N premier termes de la série.

$$\exp(x) \simeq \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$$

On peut garantir la précision de l'approximation en bornant le reste

$$\|exp(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}\| = \| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\|$$

L'objectif du TP est de calculer les différents termes de la série jusqu'à ce que l'on puisse assurer la precision du résultat (en terme de epsilon).

Question 1 : Écrire une fonction

```
function exp(x : REAL; epsilon : REAL) : REAL;
```

qui évalue $exp(x)$ à epsilon près.

Attention aux dépassements d'entier dans le calcul de $k!$, on pourra noter que $\frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \times \frac{x}{k}$

Question 2 : Écrire une fonction

```
function pi(epsilon : REAL) : REAL;
```

qui évalue π à epsilon près.

Question 3 : En 1987, David et Gregory Chudnovsky on découvert la formule suivante :

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

Quel est son intérêt ?

Une autre méthode de calcul

On a montré en 1975 que :

$$A_0 = 1 \qquad A_{n+1} = \frac{A_n + B_n}{2}$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad B_{n+1} = \sqrt{A_n \times B_n}$$

$$C_0 = \frac{1}{4} \qquad C_{n+1} = C_n - 2^n(\frac{A_n - B_n}{2})^2$$

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{(A_n + B_n)^2}{4 \times C_n}$$

Question 4 : Écrire une fonction pascal

```
function piSuite(n : INTEGER) : REAL;
```

qui calcul le n-ième terme des suites $(A)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui renvoi $\frac{(A_n+B_n)^2}{4*C_n}$