La Squelettisation

Hadrien Croubois

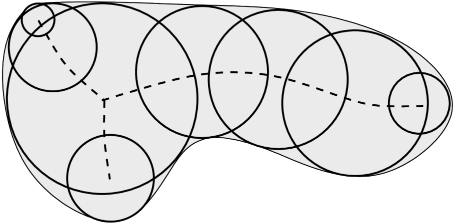
M2 IGI - Lyon 1 UCBL

20 Novembre 2012

1. Introduction
2. Historique
3. Définition par boules maximales
4. L'Axe Médian
5. Methodes par amincissement successifs

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?



Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Version simplifiée d'un objet conservant certaines caractéristiques :

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Version simplifiée d'un objet conservant certaines caractéristiques :

- Le squelette à la même topologie que l'objet initial (il permet donc notament d'isoler des composantes connexes) ;

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Version simplifiée d'un objet conservant certaines caractéristiques :

- Le squelette à la même topologie que l'objet initial (il permet donc notament d'isoler des composantes connexes) ;
- Le squelette est moins lourd que l'objet initial (il permet donc la compression de données).

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Version simplifiée d'un objet conservant certaines caractéristiques :

- Le squelette à la même topologie que l'objet initial (il permet donc notament d'isoler des composantes connexes) ;
- Le squelette est moins lourd que l'objet initial (il permet donc la compression de données).

Interet du squelette ?

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Version simplifiée d'un objet conservant certaines caractéristiques :

- Le squelette à la même topologie que l'objet initial (il permet donc notament d'isoler des composantes connexes) ;
- Le squelette est moins lourd que l'objet initial (il permet donc la compression de données).

Interet du squelette ?

- Analyse d'image ;

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Version simplifiée d'un objet conservant certaines caractéristiques :

- Le squelette à la même topologie que l'objet initial (il permet donc notament d'isoler des composantes connexes) ;
- Le squelette est moins lourd que l'objet initial (il permet donc la compression de données).

Interet du squelette ?

- Analyse d'image ;
- Reconnaissance de forme (reconnaissance de caractères) ;

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?

Version simplifiée d'un objet conservant certaines caractéristiques :

- Le squelette à la même topologie que l'objet initial (il permet donc notament d'isoler des composantes connexes) ;
- Le squelette est moins lourd que l'objet initial (il permet donc la compression de données).

Interet du squelette ?

- Analyse d'image ;
- Reconnaissance de forme (reconnaissance de caractères) ;
- Transmition de données 3D.

1. Introduction
2. **Historique**
3. Définition par boules maximales
4. L'Axe Médian
5. Methodes par amincissement successifs

[Blum 61] Introduction du concept de squelette (representation minimal d'un ensemble sous forme de lignes). Il sagit d'une transformation en distance.

[Blum 61] Introduction du concept de squelette (representation minimal d'un ensemble sous forme de lignes). Il sagit d'une transformation en distance.

Définition

En supposant qu'un feu se propage dans l'ensemble X considéré à vitesse uniforme à partir des contours de celui-ci, l'axe médian est défini comme l'ensemble des points ou différents fronts de feu s'intersectent.

- Le squelette est mince, formé d'une union de courbes ;
- Le squelette n'est pas affecté par les translation, rotations, changements d'echelle.

[Calabi] Concept de boules maximales, définition plus formelle de la notion de squelette, aussi bien pour les cas discrets et continus.

C'est le premier a prouver que le squelette par boules maximal (ou plus exactement la fonction d'étanchéité) permet de reconstruire l'ensemble initial.

Définition - Quelques outils

- Soit $A \subsetneq \mathbb{R}^2$ un ensemble non vide fermé et borné.
- Soit $b(A)$ l'ensemble des boules de A, on note $b_{max}(A)$ l'ensemble des boules maximales de A

$$b_{max}(A) = \{x \in b(A) | \forall y \in b(A), x \subseteq y \Rightarrow x = y\}$$

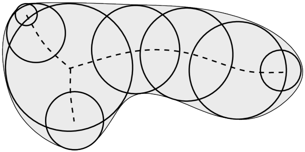
  Il sagit des elements de $b(A)$ qui ne sont inclue dans aucun autre element de $b(A)$
- **[Remarque]** Les boules maximales de A touchent ∂A en au moins deux points distincts.

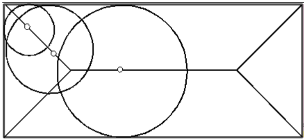
Définition - Mortzxin 1935

On appel squelette de A et on note $S(A)$, l'ensemble des centres de boules maximales contenue dans A

$$S(A) = \{centre(a) | a \in b_{max}(A)\}$$

Qu'est ce que le squelette d'une forme ?





Propriétés du squelette (1/2)

- $S(X)$ n'est ni croissant ni décrissant.

$$X \subset Y \nRightarrow S(X) \subset S(Y)$$

$$X \subset Y \nRightarrow S(Y) \subset S(X)$$

- $S(X)$ est anti-extensive

$$S(X) \subset X$$

- $S(X)$ est idempotente

$$S(X) = S(S(X)) = S(S(\ldots S(X)\ldots))$$

Propriétés du squelette (2/2)

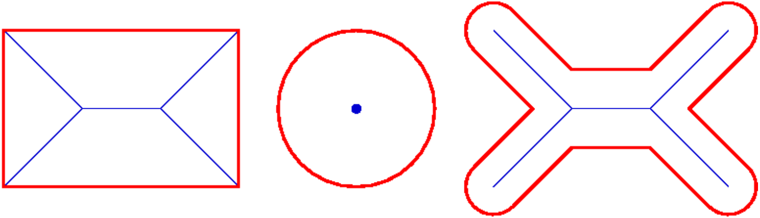
- Si X est ouvert, alors $S(X)$ preserve la connexité. Contre exemple pour le cas fermé au tableau ;
- Si X est fermé, alors X^c est ouvert et $S(X^c)$ permet de distinguer les composantes connexes (parallele avec voronoï).

Limitation de la méthode (1/2)

- Une petite perturbation de la forme initiale peu créer d'importantes modifications du squelette ;
- Problèmes dans le cas discret (squelette non connexe, epaisseur du squelette pas necessairement réduite à un point).

Limitation de la méthode (2/2)

- Problème de reversibilité.



Fonction d'étanchéité

$$A = \bigcup_{x \in b(A)} x = \bigcup_{x \in b_{max}(A)} x$$

Garder l'information des boules maximales permet de reconstruire la forme. Avec $S(X)$ on conservais les informations de centre de ces boules, il suffit donc de garder le rayon.

$$Q(A) = \{(p, r) | B(p, r) \in b_{max}(A)\}$$

On appel $Q(A)$ la fonction d'étancheité de A. Elle contient, dans le cas discret, un nombre de boules fini.

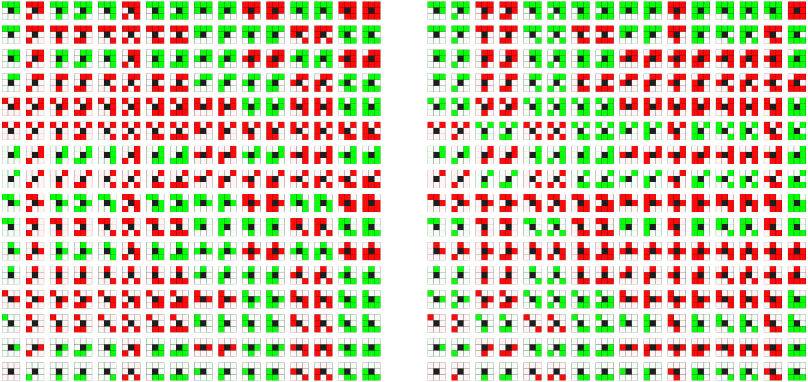
1. Introduction
2. Historique
3. Définition par boules maximales
4. L'Axe Médian
5. Methodes par amincissement successifs

[Principe] Enlever iterativement des points, en conservant les propriétés topologiques de la forme, jusqu'à l'obtention du squelette.

Quels points retirer ?

- On dit qu'un point $p \in X$ est (κ, λ) simple si
  X et $X \setminus \{p\}$ ont le meme nombre de κ-composantes
  et si
  $\bar{X}$ et $X \setminus \bar{\{p\}}$ ont le meme nombre de λ-composantes ;
- Depend de la paire de jordan utilisé (notion de voisinage)
- Tout point simple peut etre retiré sans alterer les propriétés topologiques de la forme.
- En dimension 2 et 3, la simplicité peut etre décidé localement.

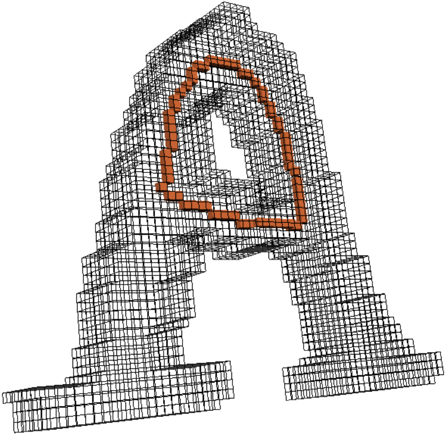
Configurations de point simples



Algorithme

```
P = { p in X | p is simple for X }
while ( P != empty )
  Q = emptyset
  for all points p in P
    if ( p is simple for X )
      X = X \ {p}
    for all q in V(p)
      Q = Q + {q}
  P = emptyset
  for all points p in Q
    if ( p is simple for X )
      P = P + {p}
```

En 3D ?

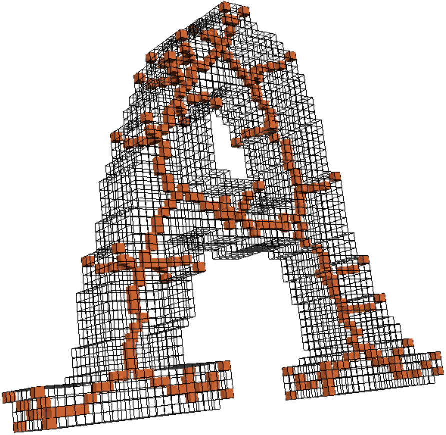


Point d'ancrage

Afin d'ammeliorer le resultat on peu ajouter des points d'ancrages. Ces points ne pourrons pas etre supprimé meme s'il sont simple dans X.

Comment choisir les points d'ancrage ?

- Points aillant un seul voisin dans X ;
- Points de $S(X)$.



Illustrations et references :

- Images Numériques & Géométrie Discrète – David Coeurjolly [1]

1. http://liris.cnrs.fr/~dcoeurjo/cours/ENS2012/html/slides/c-gd-volumique.html